

文章编号: 1000-7598 (2010) 11-3604-09

隧洞工程弹性参数反演的可辨识性及量测优化布置探讨

余远国^{1,2}, 沈成武¹

(1. 武汉理工大学 交通学院, 武汉 430063; 2. 武警武汉指挥学院, 武汉 430064)

摘 要: 探讨依据完备的量测信息开展弹性参数反演的可辨识性及量测的优化布置, 对于指导岩土工程反演实践具有重要的实用价值。利用平面弹性复变函数方法和一般弹性理论, 推导出任意形状隧洞的位移、应力解析表达式, 基于隧洞围岩位移、应力的解析解, 依据参数可辨识条件和量测优化布置的最灵敏原则, 探讨了地下隧洞工程弹性反演参数的可辨识性及测点优化布置, 并通过算例进行了验证。研究表明, 依据完备的量测信息开展弹性反分析, 只要测点布置方式适当、反演参数满足相应的限定条件, 可同时惟一辨识出 5 个参数 P 、 Q 、 M 、 E 、 μ 。参数反演的可辨识性受隧洞形状复杂性的影响, 随着隧洞复杂性的提高, 参数可同时惟一辨识需满足的限制条件大为减少, 对测点布置方式的要求也会降低。工程实践中, 为避免量测数据的少量误差导致反演计算结果的大幅度波动, 测点(线)应根据最灵敏原则优化选择各反演参数的灵敏系数最大的测点(线)组合进行量测布置。

关 键 词: 地下隧洞; 弹性反演; 信息完备; 可辨识性; 优化布置

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

Discussion of identifiability and optimal measured arrangement for elastic back-analysis of parameters in underground tunnel engineering

SHE Yuan-guo^{1,2}, SHAN Cheng-wu¹

(1. School of Transportation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China;

2. Wuhan Academy of Command, Chinese People's Armed Police Force, Wuhan 430064, China)

Abstract: Based on complete measurement information, it has important practical value for guiding back analysis practice in geotechnical engineering to study the identifiability and optimal measured arrangement of elastic back analysis of parameters. Via planar elastic function of complex variable technique and general elastic theory, the analytic formulas of displacement and stress are derived; and based on the displacement and disturbed stress solutions for the plane elasticity problems, this paper studies the identifiability and optimal measured arrangement of back analysis of elastic parameters by use of differentiability condition of parameters and most sensitive principle of optimal measured arrangement, and uses a simple example to validate the conclusion. The study shows, based on the complete measured information to carry out elastic back-analysis, the five parameters P , Q , M , E and μ can be identified uniquely under condition that the measured arrangement is appropriate and the parameters satisfy the restrictive conditions. The identifiability of inversion parameters is influenced by the shape complexity of tunnel; and with the shape complexity of tunnel increasing, the restrictive conditions of the parameters are decreased; the requirement for the measured arrangement is also reduced. To avoid the substantial fluctuation of inversion results arisen from a small error of measurement data in engineering practice, the combination of measured points (lines) which has the largest sensitivity coefficient value of each inversion parameter should be chosen as the optimal measured arrangement based on the most sensitive principle.

Key words: underground tunnel; elastic back analysis; information completeness; identifiability; optimal arrangement

1 引 言

自 20 世纪 70 年代中后期以来, 反分析得到长足的发展并取得了令人瞩目的研究成果^[1-9]。反演

问题存在不适定性^[5], 仅依据现场实测位移值开展反分析, 无论量测点如何布置, 地应力和弹性模量同为未知量的反演不可惟一辨识^[3, 6]。而工程实践中, 地应力和弹性模量的反演确定却为工程界所关

收稿日期: 2009-11-07

第一作者简介: 余远国, 男, 1973 年生, 博士, 讲师, 主要研究领域为岩土地下工程反分析。E-mail: pwzy009@163.com

心。文献[4, 8]依据应力信息是独立于位移信息的物理量特性, 指出依据完备的量测信息(除位移量测信息外, 还采集了应力信息)可望惟一确定所有待求参数, 提出了据以同时反演初始地应力和弹性参数的反分析方法, 而对于依据完备的量测信息开展弹性参数反演的可辨识性研究至今未见文献报道。此外, 量测信息一般都存在少量误差, 据以进行反演计算时常可导致结果大幅度的波动, 使得反分析结果难以切合实际。因此, 探讨依据完备的量测信息开展弹性参数反演的可辨识性及量测优化布置, 对于指导岩土工程反演实践具有重要的实用价值。

本文结合地下隧洞工程, 利用平面弹性复变函数方法和一般弹性理论推导出任意形状隧洞的位移、应力解析表达式, 基于隧洞围岩位移、应力的解析解, 依据参数可辨识条件和量测优化布置的最灵敏原则, 探讨了地下隧洞工程弹性参数反演的可辨识性及测点优化布置, 最后通过简单算例进行了结论验证。

2 隧洞工程的平面弹性复变函数解

不失一般性, 考虑洞边为自由边界的任意形状隧洞, 可设岩体内的竖直、水平和剪切初始地应力分别为 P 、 Q 、 M , 则其隧道围岩的力学正分析在力学上可化归为无限平面中的孔口问题, 如图 1 所示。

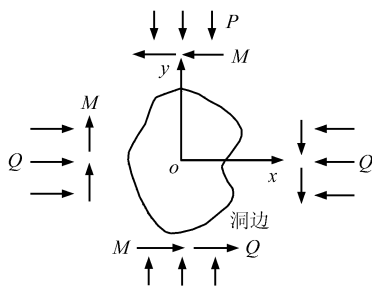


图 1 地应力作用下的隧洞
Fig.1 Tunnel under in-situ stress

地下洞室的线弹性求解利用复变函数方法较为方便, 对于复杂孔形, 为便于求解, 首先采用保角映射方法将 z 平面上给定孔的外域变换成另一复平面 ζ 上的单位圆外区域, 再采用柯西积分法寻求满足孔边应力边界条件的复变函数解 $\varphi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ [5, 10-11]。

对于图 1 所示的应力边值问题, 其映射函数为 $z = \omega(\zeta)$, 应力分量及位移分量的复变函数表示为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = \\ &= (\kappa - 1) \frac{P+Q}{4} z - \left(\frac{P-Q}{2} - iM \right) \bar{z} + \kappa\varphi_0(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'_0(\zeta)} - \overline{\psi_0(\zeta)} \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\kappa = 3 - 4\mu$; G 、 μ 分别为剪切模量和泊松比; $\operatorname{Re}[\]$ 表示 $[\]$ 的实部; $\varphi_0(\zeta)$ 、 $\psi_0(\zeta)$ 为单位圆外包括无穷远点在内的解析函数。

利用应力边界条件, 通过式(1)求解围岩应力场时, 可将其分为两部分: 一部分为隧洞开挖之前就存在的地应力场, 即由 $P+Q/4\omega(\zeta)$ 和 $(P-Q/2+iM)\omega(\zeta)$ 所代表的应力场, 另一部分则为开挖引起的扰动应力场, 即由 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 所代表的应力场。因此, 隧洞围岩扰动应力的求解公式为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \quad (3)$$

对于围岩位移场, 人们所关心和所能观测到的是由隧洞开挖所引起的围岩位移。隧洞开挖在力学上意味着在周边作用有与原始地应力大小相等、方向相反的分布应力, 因此, 围岩位移可看作是式(2)求得的平面弹性复变函数位移减去未开挖隧洞前岩体已完成的弹性位移, 后者可用一般弹性理论求得, 表达式为

$$u + iv = \frac{1+\mu}{E} \left[(1-2\mu) \frac{P+Q}{2} z - \frac{P-Q}{2} \bar{z} + iM \bar{z} \right] \quad (4)$$

开挖引起的围岩位移为式(2)与式(4)之差, 即

$$u + iv = \frac{1+\mu}{E} \left[\kappa\varphi_0(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'_0(\zeta)} - \overline{\psi_0(\zeta)} \right] \quad (5)$$

把复变函数解 $\varphi_0(\zeta)$ 、 $\psi_0(\zeta)$ 代入式(5), 可求得围岩位移求解公式, 简记为

$$\begin{aligned} u + iv &= -\frac{1+\mu}{E} \left[\frac{P+Q}{2} (3-4\mu)f_1(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. \frac{P-Q}{2} (3-4\mu)f_2(\zeta) + M(3-4\mu)f_3(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. \frac{P+Q}{2} f_4(\zeta) + \frac{P-Q}{2} f_5(\zeta) + Mf_6(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $f_1(\zeta) \sim f_6(\zeta)$ 的具体表达式同文献[6, 11]。把映射函数的逆函数 $\zeta = \omega^{-1}(z)$ 代入 $f_i(\zeta)$, $f'_i(\zeta)/\omega'(\zeta)$, 可得到 $f_i(\zeta) = F_i(z)$, $f'_i(\zeta)/\omega'(\zeta) = F'_i(z) (i=1, 2, \dots, 6)$ 。 $f_i(\zeta)$, $F_i(z)$, $F'_i(z)$ 只是坐标的函数, 与孔洞形状有关, 而与参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 无关。

工程实际中容易量测的只是径向位移 u_r , 根据关系式 $u_r = u \cos \alpha + v \sin \alpha$ (α 为测点与 x 坐标轴正向的夹角) 计算, 具体表达式参见文献[6, 11]。对于围岩扰动应力, 工程实践中可量测到与应力增量相应的主应力值, 设为 σ_1 , σ_2 , 把复变函数解 $\varphi_0(\zeta)$ 代入式(3), 可得

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = 2(P+Q) \operatorname{Re}[F'_1(z)] + 2(P-Q) \operatorname{Re}[F'_2(z)] + 4M \operatorname{Re}[F'_3(z)] \quad (7)$$

3 5 参数反演的可辨识性及量测优化布置探讨

3.1 参数可辨识条件

与参数可辨识条件紧密相关的一个概念是灵敏系数。考虑模型 $\eta = \eta(X; t, \beta)$, 其中 X 、 t 为自变量; X 可以理解为位置坐标; t 为时间; β 为参数矢量; η 为模型输出。灵敏系数是指由参数值的微小变化而引起模型输出 η 值的变化率, 设 η 关于第 i 个参数 β_i 的 1 阶偏导数为 $x_i = \partial \eta / \partial \beta_i$, 则称 x_i 为参数 β_i 的灵敏系数。

根据准则函数极小的充要条件可导出参数可辨识条件^[5]: 在量测范围内, 如果所有待求参数的灵敏系数相互线性无关, 则根据量测值可以同时惟一地辨识出所有的参数。反之, 如果参数的灵敏系数线性相关, 则不能同时惟一的辨识出所有参数。

灵敏系数线性相关或线性无关的判别式为

$$\sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial \eta_k}{\partial \beta_i} = 0, (k=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

式中: c_i 为常数; β_i 为要辨识的 m 个参数; n 为量测数量, $n \geq m$; η_k 为第 k 点的模型输出。当 $c_i (i=1, 2, \dots, m)$ 中至少有一个不等于 0 的量使式(8)成立, 则灵敏系数间线性相关; 当所有的 $c_i (i=1, 2, \dots, m)$ 均等于 0 时式(8)才成立, 则线性无关。

对于依据完备的量测信息开展反分析, 不妨设前 $l (l < n)$ 次量测为位移, 其余 $l - n$ 次为扰动应力, 则根据准则函数:

$$J = \sum_{k=1}^n (y_k - \eta_k)^2 \quad (9)$$

取得极小值的充要条件, 按照文献[5]给出的推导过程进行类似推导, 可推导出上述参数可辨识条件仍适用。此时, 式(8)、(9)中的前 l 次量测输出 y_k 及模型输出 η_k 与位移相对应, 其余的输出与扰动应力相对应。

3.2 参数反演的可辨识性探讨

考虑一般情况, 反演参数为 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ , 模型输出 η 为径向位移 u_r 及扰动应力 $\sigma_1 + \sigma_2$ 两类, 先分别求出 η 关于各参数的灵敏系数, 再代入判别式 $c_1 \frac{\partial \eta}{\partial P} + c_2 \frac{\partial \eta}{\partial Q} + c_3 \frac{\partial \eta}{\partial M} + c_4 \frac{\partial \eta}{\partial E} + c_5 \frac{\partial \eta}{\partial \mu} = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & \left\{ c_1 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) + c_2 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - \right. \\ & c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P+Q) (3-4\mu) + c_5 \left[\frac{1}{E} (P+Q) (3-4\mu) - \right. \\ & \left. \frac{4(1+\mu)}{E} (P+Q) \right] \left\} g_1(z) + \left\{ c_1 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - \right. \right. \\ & c_2 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P-Q) (3-4\mu) + \\ & c_5 \left[\frac{1}{E} (P-Q) (3-4\mu) - \frac{4(1+\mu)}{E} (P-Q) \right] \left\} g_2(z) + \right. \\ & \left\{ c_3 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - c_4 \frac{1+\mu}{E^2} M (3-4\mu) + \right. \\ & c_5 \left[\frac{M}{E} (3-4\mu) - \frac{4(1+\mu)}{E} M \right] \left\} g_3(z) + \right. \\ & \left\{ c_1 \frac{1+\mu}{E} + c_2 \frac{1+\mu}{E} - c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P+Q) + \right. \\ & c_5 \frac{1}{E} (P+Q) \left\} g_4(z) + \left\{ c_1 \frac{1+\mu}{E} - c_2 \frac{1+\mu}{E} - \right. \\ & c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P-Q) + c_5 \frac{1}{E} (P-Q) \left\} g_5(z) + \right. \\ & \left. \left\{ c_3 \frac{1+\mu}{E} - c_4 \frac{1+\mu}{E^2} M + c_5 \frac{M}{E} \right\} g_6(z) = 0 \right. \end{aligned} \quad (10)$$

$$(c_1 + c_2) g_1(z)' + (c_1 - c_2) g_2(z)' + 2c_3 g_3(z)' = 0 \quad (11)$$

式中: $g_i(z) = w \operatorname{Re}[F_i(z)] \cos \alpha + w \operatorname{Im}[F_i(z)] \sin \alpha$; $\operatorname{Im}[\]$ 表示 $[\]$ 的虚部。当 $i=1, 2, 4, 5$ 时, $w=1/2$; 当 $i=3, 6$ 时, $w=1$, 而 $g_i(z)' = \operatorname{Re}[F'_i(z)]$, ($i=1, 2, 3$)。

对于不同形状的隧洞及不同的测点布置方式, 相应的 $g_1(z) \sim g_6(z)$, $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 中线性无关的个数不同, 其中隧洞的不同形状对 $g_1(z) \sim g_6(z)$ 间及 $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 间的线性相关性影响很大。随着隧洞

形状复杂性程度的提高, $g_1(z) \sim g_6(z)$ 中及 $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 中线性无关的个数将增多。当隧洞形状的复杂性提高到一定程度时, 相应的 $g_1(z) \sim g_6(z)$ 间及 $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 间均线性无关。

这里先做一般性讨论, 假定 $g_1(z) \sim g_6(z)$ 及 $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 都是线性无关的, 由于式(10)、(11)分别对所有位移测点及扰动应力测点都成立, 只要测点布置适当, 且位移测点及扰动应力测点布置数量足够时, 可得到关于 $c_1 \sim c_5$ 的线性方程组为

$$\left. \begin{aligned} & c_1 \frac{1+\mu}{E}(3-4\mu) + c_2 \frac{1+\mu}{E}(3-4\mu) - \\ & c_4 \frac{1+\mu}{E^2}(P+Q)(3-4\mu) - c_5 \frac{1+8\mu}{E}(P+Q) = 0 \\ & c_1 \frac{1+\mu}{E}(3-4\mu) - c_2 \frac{1+\mu}{E}(3-4\mu) - \\ & c_4 \frac{1+\mu}{E^2}(P-Q)(3-4\mu) - c_5 \frac{1+8\mu}{E}(P-Q) = 0 \\ & c_3 \frac{1+\mu}{E}(3-4\mu) - c_4 \frac{1+\mu}{E^2}M(3-4\mu) - \\ & c_5 \frac{1+8\mu}{E}M = 0 \\ & c_1 \frac{1+\mu}{E} + c_2 \frac{1+\mu}{E} - c_4 \frac{1+\mu}{E^2}(P+Q) + \\ & c_5 \frac{1}{E}(P+Q) = 0 \\ & c_1 \frac{1+\mu}{E} - c_2 \frac{1+\mu}{E} - c_4 \frac{1+\mu}{E^2}(P-Q) + \\ & c_5 \frac{1}{E}(P-Q) = 0 \\ & c_3 \frac{1+\mu}{E} - c_4 \frac{1+\mu}{E^2}M + c_5 \frac{M}{E} = 0 \\ & c_1 + c_2 = 0; c_1 - c_2 = 0; 2c_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

显然, 工程实践中, $P+Q$ 、 $P-Q$ 、 M 中必然存在不为 0 者 (P 、 Q 、 M 不可能全为 0), 故由式(12)可求得 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$, 即参数可惟一辨识。

根据逆反分析法的原理, 利用现场量测信息与弹性反演参数之间的关系式(6)、(7), 通过矩阵求逆可得出反演计算结果。显然, 要惟一辨识出待求参数, 矩阵方程个数应不少于反演参数个数, 即量测信息总数应不少于弹性反演参数个数。仅依据现场位移量测信息进行反演时, 可得到关于 $c_1 \sim c_5$ 的线性方程组为式(12)中第 1~6 式, 其中只有 4 个是独立的, 此时要使 $c_1 \sim c_5$ 只有 0 解, 即 5 参数可惟一辨识, 须至少有一个扰动应力增量量测信息作为补充。同理, 依据扰动应力增量量测信息进行反演时, 式(12)中第 7~9 式中独立方程的个数为 3, 因此 5 参数可惟一辨识须至少有 2 个位移量测信息作为补充。可见, 5 参数可惟一辨识, 完备的量测信息应至少包含 1 个扰动应力增量量测信息、2 个位移量测信息, 且量测信息总数不应少于 5 个。

工程实践中, 与位移量测相比, 应力量测有一定难度。若扰动应力测点布置数目有限(少于 3), 由式(11)可得到的独立线性方程的个数少于 3, 对于其反演参数的可辨识性, 本文以扰动应力测点布置数目为 1 为例来加以探讨。不妨设扰动应力测点为 z_k , 将 $z = z_k$ 代入式(11), 得到的线性方程为

$$c_1(g_1(z_k)') + g_2(z_k)') + c_2(g_1(z_k)') - g_2(z_k)') + 2c_3g_3(z_k)' = 0 \quad (13)$$

把式(13)与式(12)中第 1~6 式组合得到关于 $c_1 \sim c_5$ 的线性方程组, 其系数矩阵经初等行变换可化为

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & P+Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P-Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ E(1+\mu) & 0 & 0 & -(1+\mu)P & EP \\ 0 & -E(1+\mu) & 0 & (1+\mu)Q & -EQ \\ 0 & 0 & E(1+\mu) & -(1+\mu)M & EM \\ g_1(z_k)' + g_2(z_k)' & g_1(z_k)' - g_2(z_k)' & 2g_3(z_k)' & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (14)$$

变换后, 式(14)对应的线性方程组与原方程组同解。

显然, P 、 Q 、 M 不可能同时为 0, 故 $c_5 = 0$ 。把其代入式(14)可得到关于 $c_1 \sim c_4$ 的线性方程组, 其

系数矩阵行列式为

$$\Delta = -E^2(1+\mu)^3(P+Q)g_1(z_k)' + (P-Q)g_2(z_k)' + 2Mg_3(z_k)' \quad (15)$$

由式(15)可知, $\Delta \neq 0$ 时, 关于 $c_1 \sim c_4$ 的线性方程组只有 0 解。故对于仅取得 1 次扰动应力量测值的隧洞反分析, 只要测点布置适当, 其中扰动应力测点 z_k 的布置应满足限制条件 $(P+Q)g_1(z_k)' + (P-Q)g_2(z_k)' + 2Mg_3(z_k)' \neq 0$, 参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 可同时惟一辨识。

由此, 可得到一般性结论: 对于隧洞形状复杂性达到一定程度的弹性反分析, 相应的 $g_1(z) \sim g_6(z)$ 间及 $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 间均线性无关, 只要量测信息完备, 测点布置适当时, 可同时惟一辨识 5 个参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 。对于应力测点布置数目少于 3 的隧洞反分析, 要同时惟一辨识出参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ , 扰动应力测点的适当布置应为至少布置一个满足限制条件 $(P+Q)g_1(z_k)' + (P-Q)g_2(z_k)' + 2Mg_3(z_k)' \neq 0$ 的测点。

对于简单孔形, 随着隧洞形状复杂性程度的降低, 相应的 $g_1(z) \sim g_6(z)$ 间、 $g_1(z)' \sim g_3(z)'$ 间线性无关的个数减少, 参数可同时惟一辨识需要满足的限制条件增加, 对测点布置方式的要求也会提高, 达到完备的量测信息所需的最少位移、扰动应力增量量测信息个数也会有所不同。具体以圆孔为例进行说明。

对于圆形隧洞, 映射函数为 $z = R\zeta$, 其中 R 为圆孔的半径, 相应的 $f_1(\zeta) \sim f_6(\zeta)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} f_1(\zeta) &= 0; f_2(\zeta) = -\frac{R}{\zeta}; f_3(\zeta) = \frac{iR}{\zeta}; \\ f_4(\zeta) &= \frac{R}{\zeta}; f_5(\zeta) = -\frac{R\zeta}{\zeta^2} + \frac{R}{\zeta^3} \\ f_6(\zeta) &= -\frac{iR\zeta}{\zeta^2} + \frac{iR}{\zeta^3} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

经过换算得到

$$\left. \begin{aligned} g_1(r, \alpha)' &= 0; g_2(r, \alpha)' = \frac{R^2}{r^2} \cos 2\alpha \\ g_3(r, \alpha)' &= -\frac{R^2}{r^2} \sin 2\alpha \\ g_1(r, \alpha) &= 0; g_2(r, \alpha) = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \cos 2\alpha \\ g_3(r, \alpha) &= \frac{R^2}{r} \sin 2\alpha; g_4(r, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \\ g_5(r, \alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^4}{r^3} - \frac{R^2}{r} \right) \cos 2\alpha \\ g_6(r, \alpha) &= \left(\frac{R^2}{r} - \frac{R^4}{r^3} \right) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: r 、 α 分别为 z 的模和辐角。

由于仅 $g_2(z) \sim g_6(z)$ 间及 $g_2(z)'$ 、 $g_3(z)'$ 间是线性无关的, 由式(10)、(11)可得到的关于 $c_1 \sim c_5$ 的线性方程组为式(12)中第 2~6、8、9 式的组合。

测点布置数量足够时, 若不考虑测点布置方式对参数辨识性的影响, 由式(12)第 8、9 式可得 $c_1 = c_2$, $c_3 = 0$, 将其代入式(12)的第 2~6 式可得

$$\left. \begin{aligned} -c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P-Q)(3-4\mu) - c_5 \frac{1+8\mu}{E} (P-Q) &= 0 \\ -c_4 \frac{1+\mu}{E^2} M(3-4\mu) - c_5 \frac{1+8\mu}{E} M &= 0 \\ 2c_1 \frac{1+\mu}{E} - c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P+Q) + c_5 \frac{1}{E} (P+Q) &= 0 \\ -c_4 \frac{1+\mu}{E^2} (P-Q) + c_5 \frac{1}{E} (P-Q) &= 0 \\ -c_4 \frac{1+\mu}{E^2} M + c_5 \frac{M}{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

考查式(18)第 3 式与其余任意 2 式组合构成的方程组对应的系数矩阵行列式, 可以得出以下结论: 当 $P \neq Q$ 或 $M \neq 0$ 时, P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 的反演具有惟一性; 当 $P = Q$ 且 $M = 0$ 时, 如将 P 、 Q 其中之一和 E 、 μ 其中之一作为已知, 或将 E 、 μ 作为已知, 则其余 3 个参数的反演具有惟一性。

对于圆形隧洞, 式(12)的第 2~6 式中独立方程的个数仍为 4, 而式(12)的第 8、9 式中独立方程的个数仅为 2, 故 5 参数可同时惟一辨识, 完备的量测信息应至少包含一个扰动应力增量量测信息、3 个位移量测信息, 且量测信息总数不应少于 5 个。

对于测点布置方式对参数辨识性的影响, 本文重点研究扰动应力增量测点布置对参数辨识性的影响。对于位移测点, 只要不布置在同一圆周或同一过圆心的直线上, 其测点布置方式对参数的可辨识性不会有影响, 限于篇幅, 在此不作深入探讨。

将 $g_i(z)'$ 代入式(11), 可得

$$(c_1 - c_2) R^2 / r^2 \cos 2\alpha - 2c_3 R^2 / r^2 \sin 2\alpha = 0 \quad (19)$$

对所有扰动应力测点式(19)均成立, 不妨设其中某 2 个扰动应力测点坐标为 (r_{k1}, α_{k1}) , (r_{k2}, α_{k2}) , 将其代入式(19)可得到关于 $c_1 - c_2$ 、 c_3 的线性方程组, 其相应的系数矩阵行列式为 $\Delta = 2R^4 \sin(2\alpha_{k1} - 2\alpha_{k2}) / (r_{k1}r_{k2})^2$, 可见只要 $\Delta \neq 0$, 即布置了满足条件 $\sin(2\alpha_{k1} - 2\alpha_{k2}) \neq 0$ 的 2 个扰动应力测点 (测点不在同一条过圆心的直线上或相互垂直的两条过圆心的直线上), 则由式(19)可得到 $c_1 = c_2$, $c_3 = 0$ 。此时, 只要位移测点不布置在同一圆周或同一过圆心的直

线上, 且布置了不少于 3 个位移测点, 反演参数的可辨识性同上。

如果条件 $\sin(2\alpha_{k1} - 2\alpha_{k2}) \neq 0$ 不满足, 式(19)仅能提供 1 个独立方程, 则参数的可辨识性转化为应力测点布置数目仅为 1 个的参数可辨识性问题。此时, 可得到关于 $c_1 \sim c_5$ 的线性方程组为式(12)的第 2~6 式及式(13), 其系数矩阵经初等行变换可化为式(14)的后 6 行组成的矩阵, 故可知 $P \neq Q$ 或 $M \neq 0$ 时, 只要行列式(15) $\Delta \neq 0$, 位移测点不布置在同一圆周或同一过圆心的直线上, 且布置了不少于 4 个位移测点, 5 参数反演可同时惟一辨识。设 r_k 和 α_k 分别为扰动应力测点 z_k 的模和辐角, 将其代入式(15), 可得惟一辨识出 5 参数需满足的条件为

$$R^2/r_k^2 [(P-Q)\cos 2\alpha_k - 2M\sin 2\alpha_k] \neq 0 \quad (20)$$

具体地, 由式(20)可得到结论: 若 $P-Q \neq 0$, 则 $\cot(2\alpha_k) \neq 2M/(P-Q)$ 时, P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 的反演可同时惟一辨识; 若 $M \neq 0$, 则 $\tan 2\alpha_k \neq (P-Q)/(2M)$ 时, P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 的反演可同时惟一辨识。

3.3 量测优化布置探讨

工程实践中观测数据常不可避免地存在误差, 由于误差传递效应使得反演结果难以切合实际, 因此, 有必要对测点(线)布置进行优化选择。

对于地下隧洞工程反分析, 量测系统特性 η_k 与反演参数 β_i 的函数关系可表征为

$$\eta_k = f_k(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \quad (21)$$

取岩土力学参数真值 $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*)$ 为基准参数值, 设量测真值为 η_k^* , 可得

$$\eta_k^* = f_k(\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*) \quad (22)$$

显然, 参数 β_i 在其各自可能的范围内变化时, 式(21)始终存立。现利用泰勒公式将式(21)右边在基准参数值处展开并忽略高阶微量, 可近似可得

$$\eta_k = f_k(\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*) + \sum_{i=1}^m x_{ki}(\beta_i - \beta_i^*) \quad (23)$$

式中: $x_{ki} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial \beta_i} \right|_{\beta=\beta^*}$ 为参数 β_i 的灵敏系数。记量测

信息误差及反演参数误差 $\delta\eta_k = \eta_k - \eta_k^*$, $\delta\beta_i = \beta_i - \beta_i^*$, 则式(23)可写为

$$\delta\eta_k = \sum_{i=1}^m x_{ki} \delta\beta_i \quad (24)$$

显然, 误差模型式(24)可近似描述量测信息误差与反演参数误差间的函数关系, 因此依据现场量

测信息反演岩土力学参数的量测系统模型为

$$\delta\eta = X\delta\beta \quad (25)$$

式中: $\delta\eta = (\delta\eta_1, \delta\eta_2, \dots, \delta\eta_n)^T$; $\delta\beta = (\delta\beta_1, \delta\beta_2, \dots, \delta\beta_n)^T$; X 为灵敏系数矩阵。

式(25)两边取范数进行运算, 可得

$$\|\delta\beta\| \geq \frac{1}{\|X\|} \|\delta\eta\| \quad (26)$$

式中: $\|\cdot\|$ 表示范数。

由式(26)可见, 量测值关于反演参数的灵敏系数越大, 反演参数误差越小。因此, 测点(线)的布置应按最灵敏原则进行优化布置, 即选用各反演参数的灵敏系数最大的测点(线)组合来布置位移、扰动应力增量测点。

特别地, 对于线性模型, 量测系统特性 η_k 与反演参数 β_i 的线性函数关系可表示为

$$\eta = X\beta \quad (27)$$

设 X 是非奇异阵, 则量测信息的微小误差对反演解的影响可表征为

$$\frac{\|\delta\beta\|}{\|\beta\|} \leq \|X\| \|X^{-1}\| \frac{\|\delta\eta\|}{\|\eta\|} \quad (28)$$

式(28)给出了解的相对误差上界, 量测信息 η 的相对误差在解中可能放大 $\|X\| \|X^{-1}\|$ 倍。实际上, 量 $\|X\| \|X^{-1}\|$ 刻画了由原始数据的相对误差引起的解的相对误差大小, 即刻画了用于反演的线性模型的“病态”程度, 称 $\text{cond}(X)_v = \|X\|_v \|X^{-1}\|_v$ ($v=1, 2$ 或 ∞) 为矩阵 X 的条件数。因此, 根据最灵敏原则确定线性模型的优化量测布置的测点(线)时, 测点(线)组合应使得灵敏系数矩阵的条件数最小。

具体地, 对于圆形地下隧洞工程, 围岩任意点可量测到的径向位移的计算式为

$$u_r = \frac{1+\mu}{E} \left(\frac{P+Q}{2} \frac{R^2}{r} + \frac{P-Q}{2} \frac{R^4}{r^3} \cos 2\alpha - M \frac{R^4}{r^3} \sin 2\alpha \right) - \frac{4(1-\mu^2)}{E} \left(\frac{P-Q}{2} \frac{R^2}{r} \cos 2\alpha - M \frac{R^2}{r} \sin 2\alpha \right) \quad (29)$$

测点扰动应力增量为

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2(P-Q) \frac{R^2}{r^2} \cos 2\alpha - 4M \frac{R^2}{r^2} \sin 2\alpha \quad (30)$$

测点径向位移及扰动应力增量关于参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 的灵敏系数分别为

上述 3 种方案均量测信息完备, 位移测点数量足够且布置适当, 参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 反演的可辨识性仅与应力测点的布置是否适当有关。对于应力测点布置, 仅方案 1、2 的测点布置适当, 故可同时惟一辨识出 5 参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 。表 2 结果表明, 方案 1、2 的反演结果与理论解吻合较好, 而方案 3 的反演结果不惟一, $P=1.627\ 46\ \text{MPa}$, $Q=1.162\ 97\ \text{MPa}$, $M=0$, $E=2.620\ 85\ \text{GPa}$, $\mu=0.299\ 382$ 是其一组解, 取其进行正算得到测点 4 的扰动应力为 $1.044\times 10^{-7}\ \text{MPa}$, 测线①、②、③的相对位移、测点 2、5、8、9 的径向位移及测点 5、6 的扰动应力与表 1 中相应的理论值相同, 而正算结果与反演依据的测点(线)位移、测点扰动应力相当吻合, 可见本文探讨的关于参数反演的可辨识性结论正确。

对于量测优化布置, 为便于分析, 仍结合该算例对反演 P 、 Q 、 M 的位移测点布置进行优化选择。

依据式(31)、(32), 代入 E 、 μ 和 R 的值, 可求得各测点位移关于 P 、 Q 、 M 的灵敏系数, 具体见表 3。考察表 3 可知, 测点 7、1、4 分别为参数 P 、 Q 、 M 的灵敏系数最大测点。

量测数据的精确程度常用误差来表征, 其误差有一定的范围, 因此, 可用区间变量^[13]来描述。采用区间分解表达式, 径向量测位移向量可写为

$$U \in U^I = U^c + [-\Delta U, \Delta U] = U^c + \Delta U^I \quad (33)$$

式中: U 为测点径向量测位移组成的向量; U^I 为位移向量所在的闭区间; U^c 为量测位移均值向量, ΔU 为位移绝对误差向量, $\Delta U^I = [-\Delta U, \Delta U]$ 。利用区间分析理论^[14], 根据逆反分析原理可得到 P 、 Q 、 M 的解界限。

表 3 测点灵敏系数

Table 3 Sensitivity coefficients of observation points

测点	灵敏系数/(m/MPa)		
	X_{u1}	X_{u2}	X_{u3}
1	-3.459×10^{-4}	1.211×10^{-3}	0
2	-4.013×10^{-4}	1.050×10^{-3}	0
3	-3.735×10^{-4}	8.923×10^{-4}	0
4	4.323×10^{-4}	4.323×10^{-4}	1.556×10^{-3}
5	3.243×10^{-4}	3.243×10^{-4}	1.451×10^{-3}
6	2.594×10^{-4}	2.594×10^{-4}	1.266×10^{-3}
7	1.211×10^{-3}	-3.459×10^{-4}	0
8	1.050×10^{-3}	-4.013×10^{-4}	0
9	8.923×10^{-4}	-3.735×10^{-4}	0
10	1.211×10^{-3}	-3.459×10^{-4}	0

考虑各测点位移的量测绝对误差均为 $0.2\times 10^{-4}\ \text{m}$, 采用最优位移测点布置进行区间反演所得的结果列于表 4。为便于比较, 几种不同的位移量测方案及位移反分析计算结果也一并列于表中。

由表 4 可知, 按最灵敏原则优化布置的量测方案 1 反分析结果的相对误差较小。方案 2 与方案 1 相比, 虽测点 5 关于 M 的灵敏系数稍小, 但灵敏系数的矩阵条件数较小, 故解的相对误差与方案 1 基本相当。比较方案 3、4 可知, 随着测点灵敏系数变小, 反分析解的相对误差变大。其中, 方案 4 依据文献给出的量测数据误差最小原则^[15]应为最优量测布置方案, 事实上由于误差传递效应的影响, 该方案的反分析解的相对误差远大于方案 1。由此可见, 按最灵敏原则优化选择量测布置方案是正确的。此外, 对比方案 1、5 可知, 增加量测信息的数目不能改善解的精度。

表 4 位移量测布置方案及区间反分析结果

Table 4 Scheme of displacement measurement arrangement and result of interval back-analysis

方 案	位移 测点	反演结果					
		P /MPa	误差 /%	Q /MPa	误差 /%	M /MPa	误差 /%
1	1、4、7	[1.377,1.423]	1.65	[0.977,1.023]	2.31	[-0.0257,0.0257]	
2	1、5、7	[1.377,1.423]	1.65	[0.977,1.023]	2.31	[-0.0241,0.0241]	
3	1、5、9	[1.367,1.433]	2.38	[0.974,1.026]	2.60	[-0.0270,0.0270]	
4	4、7、8	[1.278,1.522]	8.71	[0.631,1.369]	3.69	[-0.1491,0.1491]	
5	1、4、7、10	[1.377,1.423]	1.65	[0.977,1.023]	2.31	[-0.0257,0.0257]	

5 结 论

(1) 只要量测信息完备(除位移量测信息外, 还采集了应力信息), 测点布置方式适当时, 反演参数满足相应的限制条件, 5 个参数 P 、 Q 、 M 、 E 和 μ 反演可同时惟一辨识。

(2) 隧洞形状的复杂性及测点的布置方式对参数的辨识性有影响。简单孔形隧洞, 参数反演具有惟一性对参数的限制条件较多, 对测点布置方式的要求较高; 而随着隧洞复杂性的提高, 参数的限制条件大为减少, 对测点布置方式的要求也会降低。

(3) 工程实践中, 在保证参数可惟一辨识的基础上, 还应按最灵敏原则优化选择各反演参数的灵敏系数最大的测点(线)组合来布置位移、扰动应力增量测点, 并尽量使得灵敏系数矩阵条件数较小, 以减少量测数据误差传递产生的影响。

参 考 文 献

- [1] KIRSTEN H A D. Determination of rock mass elastic moduli by back-analysis of deformation measurement[C]//Proceedings of Symposium on Exploration for Rock Engineerings. Johannesbuerg: [s. n.], 1976: 1154—1160.
- [2] SAKURAI S, TAKEUCHI K. Back Analysis of measured displacement of tunnel[J]. **Rock Mech. And Rock Eng.**, 1983, 16 (3): 173—180.
- [3] 吕爱钟. 巷道围岩参数及地应力可辨识性的探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 1988, 7(2): 155—164.
LÜ Ai-zhong. Discussion of identifiability for parameters of the surrounding rock and in-situ stress[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1988, 7(2): 155—164.
- [4] 杨林德, 朱合华, 冯紫良, 等. 岩土工程问题的反演理论及工程实践[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [5] 吕爱钟, 蒋斌松. 岩石力学反问题[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1998.
- [6] 张路青, 贾正雪. 弹性位移反分析对地应力、弹模的反演惟一性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(2): 172—177.
ZHANG Lu-qing, JIA Zheng-xue. Inversion uniqueness of elastic displacement back-analysis for ground stress and elastic modulus[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 23(2): 172—177.
- [7] 杨志法, 王思敬, 冯紫良, 等. 岩土工程反分析原理及应用[M]. 北京: 地震出版社, 2003.
- [8] 王登刚, 刘迎曦, 李守巨, 等. 巷道围岩初始应力场和弹性模量的区间反演方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(3): 305—308.
WANG Deng-gang, LIU Ying-xi, LI Shou-ju, et al. Interval back analysis of initial stresses and elastic modulus of surrounding rocks of tunnels[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(3): 305—308.
- [9] 吴祥松, 朱合华, 叶飞. 岩土工程参数反分析的可辨识性研究[J]. 地下空间与工程学报, 2006, 2(3): 377—379.
WU Xiang-song, ZHU He-hua, YE Fei. Research on identifiability of the parameter in the back analysis of geotechnical engineering problems[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2006, 2(3): 377—379.
- [10] 陈子荫. 围岩力学中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.
- [11] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [12] SHE Yuan-guo, SHEN Cheng-wu. Chaotic search-based adaptive immune genetic algorithm[C]//Proc. of the Second International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering. WANG shou- Yang, YU Lean, WEN Feng-Hua, eds.. Beijing: IEEE Computer Society, 2009: 74—78.
- [13] 余远国, 沈成武, 黄艳. 修正的迭代算法用于结构不确定性问题的静力区间分析[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2006, 30(2): 275—278.
SHE Yuan-guo, SHEN Cheng-wu, HUANG Yan. Amended iterative method for solving the static governing equations of interval finite element method[J]. **Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering)**, 2006, 30(2): 275—278.
- [14] ALEFELD G, HERZBERGER J. Introduction to interval computations[M]. New York: Academic Press, 1983.
- [15] 彭敏. 地下洞室位移量测的优化布置[J]. 中国市政工程, 2002, 96(1): 39—42.
PENG Min. Optimal layout of underground cavity displacement measurement[J]. **China Municipal Engineering**, 2002, 96: 39—42.